

מתמטיקה למדעים 2

פרק 5 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

1.	חזקה מאלגברת לינארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים
2.	מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הლכISON
3.	

חזקה מאלגברת לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

שאלות

בשאלות הבאות מצאו את הערכים העצמיים והווקטוריים העצמיים של A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$x=0, \quad x=1, \quad x=2, \quad v_{x=0} = (-1, 0, 1), \quad v_{x=1} = (0, 1, 0), \quad v_{x=2} = (1, 0, 1) \quad (1)$$

$$x=6, \quad x=2, \quad x=-4, \quad v_{x=6} = (0, 0, 1), \quad v_{x=2} = (1, 1, 1), \quad v_{x=-4} = (-1, 1, 0) \quad (2)$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 3, \quad v_{x=2} = (1, 1, 1), \quad v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1) \quad x_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0) \quad (3)$$

$$x=1, \quad x=3, \quad x=-2, \quad v_{x=1} = (-1, 4, 1), \quad v_{x=3} = (1, 2, 1), \quad v_{x=-2} = (-1, 1, 1) \quad (4)$$

$$x=1, \quad x=4, \quad x=-1, \quad v_{x=1} = (1, -2, 1), \quad v_{x=4} = (1, 1, 1), \quad v_{x=-1} = (-1, 0, 1) \quad (5)$$

$$x=-1, \quad x=3 \quad v_{x=-1} = (-1, 2), \quad v_{x=3} = (1, 2) \quad (6)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, \quad v_{x=1+2i} = (1+i, 2), \quad v_{x=1-2i} = (1-i, 2) \quad (7)$$

$$x=1, \quad x=1+\sqrt{3}i, \quad x=1-\sqrt{3}i, \quad v_{x=1} = (1, 1, 1), \quad , \quad (8)$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), \quad v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכソン

שאלות

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 1-2:

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (1)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ כך ש}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ נtauן } \quad (3)$$

הוכיחו כי $z(t) = y(t)$

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 4-5:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (5)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ נtauן } \quad (6)$$

$$\text{חשבו: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

7) פתרו את מערכת המשוואות :

$$\begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2' = 0 \\ 3y_2' - 4y_1' - 5y_2 = 0 \end{cases}$$

8) פתרו :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } \vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t)$$

הערה : בשאלות 7 ו-8 יש להגיע לפתרון המורכב מהפתרונות ממשי.

תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$z(t) = y(t) \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$0 \quad (6)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad (7)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[\cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ c_3 e^t \left[\sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (8)$$